Mecánica Estadística

30/05/2024

Cuestiones

1. (*1 punto*) Expónganse brevemente las condiciones de validez de la descripción clásica de los microestados de un sistema físico. En el caso de un sistema de partículas idénticas, relaciónense las condiciones anteriores con el límite diluido.

2. (*1 punto*) Desarróllense brevemente los conceptos de volumen fásico y densidad de estados de un sistema físico.

3. (*1 punto*) Obténgase la gran función de partición de un gas ideal cuántico de partículas idénticas a temperatura T y potencial químico μ, si sus partículas tienen un espectro de energía dado por ϵ_r y el número máximo de éstas por estado cuántico es n_{max}. Supóngase una eventual partícula cuántica que permitiese un máximo de dos partículas por estado cuántico ($n_{\max} = 2$). Particularícese la gran función de partición obtenida para este caso y obténgase el número de ocupación medio por estado cuántico ($\bar{n}_r$).

4. (*1 punto*) Escríbase el teorema de equipartición de la energía generalizado y sus condiciones de validez. Utilícese dicho teorema para determinar el valor medio del hamiltoniano

$$H = cp = c\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$$

Problemas

1. (*1,5 puntos*) *Cadena unidimensional en contacto con un termostato a la temperatura T.* Consideremos una cadena unidimensional formada por N eslabones localizados e independientes de longitud l y momento dipolar eléctrico p, cada uno de los cuales puede adoptar dos orientaciones $\pm$ en contacto térmico con un termostato a la temperatura T, de modo que la longitud *end-to-end* de la cadena es $L = (n_+ - n_-)l$. En presencia de un campo eléctrico E las energías de las orientaciones posibles de cada eslabón son $\epsilon_\pm = \epsilon_0 \mp pE$.

    a) Utilizando la ecuación maestra con probabilidades de transición por unidad de tiempo ω_{+-} y ω_{-+}, escríbase una ecuación para la evolución temporal de la longitud media de la cadena durante su relajación hacia el equilibrio.

    b) Resuélvase la ecuación anterior e identifíquese la longitud media de equilibrio predicha por este resultado en función de las probabilidades de transición por unidad de tiempo.

    c) Obténgase a partir del resultado del apartado anterior la longitud media de la cadena en equilibrio como función de la temperatura. ¿Cuál es el valor de ésta en ausencia de campo eléctrico?

    d) Analícese la evolución temporal de la longitud media de la cadena

$$\delta(T) = \frac{d\langle L\rangle}{dt}$$

    en las inmediaciones del equilibrio en el régimen de temperaturas negativas calculando $\delta(T > 0)/\delta(T < 0)$. Considérese que en la proximidad del equilibrio es aproximadamente válida la relación de balance detallado.

2. (*1,5 puntos*) *Principio de entropía máxima de Jaynes.* Aplicando el principio de entropía máxima de Jaynes, obténgase la fracción de ocupación $< n_+ > / < n_- >$ del sistema del ejercicio anterior en equilibrio. Para ello,

    a) Escríbanse las restricciones de la distribución de probabilidad $p_\pm$, la normalización y la constancia de la energía media del sistema.

    b) Aplíquese el principio de entropía máxima de Jaynes y obténganse las probabilidades $p_\pm$ óptimas.

    c) Obténganse expresiones para los multiplicadores de Lagrange en términos de la temperatura y del campo eléctrico aplicado.

    d) Obténgase el cociente $< n_+ > / < n_- >$ en términos de la temperatura y del campo eléctrico aplicado.

3. (*1,5 puntos*) *Gas de fotones bidimensional.* Mediante el uso de espejos de tamaños micrométricos y moléculas de tinte es posible crear un gas de fotones que, a temperaturas convencionales, se comporta como un gas ideal de fotones bidimensional (*Thermalization of a two-dimensional photonic gas in a 'white wall' photon box.* Nature Physics, 6(7), 512-515.). Bajo estas condiciones, los fotones se encuentran confinados en una cavidad de área A, y, a su vez, se encuentran en equilibrio térmico con los espejos a temperatura T. Calcúlese:

    a) La densidad de estados de un gas ideal ultrarelativista en dos dimensiones.

    b) El número medio de fotones en la cavidad en función de la temperatura.

    c) El equivalente de la distribución espectral de Planck en dos dimensiones. Obténgase el comportamiento de dicha distribución en el régimen de altas y bajas frecuencias.

    d) La energía interna del gas de fotones y su capacidad calorífica en función de la temperatura.

4. (*1,5 puntos*) *Gas ideal en un campo gravitatorio.* Determínese la función de partición de un gas ideal clásico de N partículas de masa m en equilibrio térmico la temperatura T y en presencia de un campo gravitatorio g, contenido en una caja R de sección horizontal A y cuyas caras inferior y superior están situadas en $z = z_0$ y $z = z_L$, respectivamente, con $z_L - z_0 = L$. Calcúlese:

    a) La energía media.

    b) El calor específico.

    c) Las ecuaciones de estado correspondientes a los parámetros externos z_0 y z_L. Interprétese el resultado.

Relaciones matemáticas de posible utilidad:

Aproximaciones

$$\ln(N!) \approx N\ln(N) - N; \text{ para } N \to \infty$$

$$\ln(1+\alpha x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(\alpha x)^n$$

$$\ln(1-\alpha x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha x)^n}{n}; \text{ para } 0 < x < 1$$

$$\ln(1 \pm x) \approx \pm x; \text{ para } |x| \ll 1$$

Función Γ

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x}\, dx;$$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x);$$

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right) = \frac{(2n)!}{4^n (n!)}\sqrt{\pi}; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Función ζ de Riemann

$$g_k(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n^k}$$

$$g_k(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \equiv \zeta(k)$$

$$\frac{dg_k(\lambda)}{d\lambda} = \frac{1}{\lambda} g_{k-1}(\lambda)$$

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{12}\ ;\ \zeta(0) = -\frac{1}{2}$$

$$\zeta\left(\frac{1}{2}\right) \approx -1{,}46\ ;\ \zeta(1) \to \infty$$

$$\zeta\left(\frac{3}{2}\right) \approx 2{,}61\ ;\ \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\zeta(3) \approx 1{,}20\ ;\ \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$$

$$f_k(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\lambda^n}{n^k}$$

Integrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+b)^2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+bx+c}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{\frac{b^2}{4a}+c}$$

$$I_n = \int_0^{\infty} x^n e^{-\alpha x^2}\ ;\ I_{n+2} = \frac{n+1}{2\alpha} I_n$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^{x} e^{-t^2} dt = \mathrm{erf}(x)$$

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-\alpha x} dx = \frac{\Gamma(n+1)}{\alpha^{n+1}}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^n}{e^x - 1} dx = \Gamma(n+1)\zeta(n+1)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^n}{e^x + 1} dx = (1 - 2^{-n})\Gamma(n+1)\zeta(n+1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = 1$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax^2} dx = \frac{a^{-n/2-1/2}}{2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

Varios

Volumen de una hiperesfera de radio r en D dimensiones:

$$V_D = \frac{r^D \pi^{D/2}}{\Gamma(D/2+1)}$$

Teorema multinomial

$$\left(\sum_i x_i\right)^n = \sum_{k_1+\cdots+k_m=n} \binom{n}{k_1,\ldots,k_m} \prod_{1\le t\le m} x_t^{k_t}$$

$$\binom{n}{k_1,k_2,\ldots,k_m} = \frac{n!}{k_1!\,k_2!\cdots k_m!}$$

Constantes físicas de interés

$k_B = 1{,}38\ 10^{-23}$ J/mol K Cte. Boltzmann

$h = 6{,}63\ 10^{-34}$ kg m^2 s^{-1} Cte. Planck

$m_e = 9{,}1\ 10^{-31}$ kg masa del electrón

$m_n = 1{,}6749\ 10^{-27}$ kg masa del neutrón

$m_p = 1{,}6726\ 10^{-27}$ kg masa del protón

$e = 1{,}6\ 10^{-19}$ C carga del electrón

$c = 3\ 10^8$ m s^{-1} velocidad de la luz

$\mu_N = 5{,}05\ 10^{-27}$ J T^{-1} magnetón nuclear

$\mu_B = 9{,}27\ 10^{-24}$ J T^{-1} magnetón de Bohr